

Document de travail du LEM / Discussion paper LEM
2018- 07

Georgescu-Roegen versus Solow/Stiglitz : De la validité à moyen terme de la fonction Cobb-Douglas avec ressource naturelle

Marc GERMAIN

LEM UMR 9221 / marc.germain@univ-lille.fr

<http://lem.cnrs.fr/IMG/pdf/dp2018-07.pdf>

 <http://lem.cnrs.fr/>

Les documents de travail du LEM ont pour but d'assurer une diffusion rapide et informelle des résultats des chercheurs du LEM. Leur contenu, y compris les opinions exprimées, n'engagent que les auteurs. En aucune manière le LEM ni les institutions qui le composent ne sont responsables du contenu des documents de travail du LEM. Les lecteurs intéressés sont invités à contacter directement les auteurs avec leurs critiques et leurs suggestions.

Tous les droits sont réservés. Aucune reproduction, publication ou impression sous le format d'une autre publication, impression ou en version électronique, en entier ou en partie, n'est permise sans l'autorisation écrite préalable des auteurs.

Pour toutes questions sur les droits d'auteur et les droits de copie, veuillez contacter directement les auteurs.

The goal of the LEM Discussion Paper series is to promote a quick and informal dissemination of research in progress of LEM members. Their content, including any opinions expressed, remains the sole responsibility of the authors. Neither LEM nor its partner institutions can be held responsible for the content of these LEM Discussion Papers. Interested readers are requested to contact directly the authors with criticisms and suggestions.

All rights reserved. Any reproduction, publication and reprint in the form of a different publication, whether printed or produced electronically, in whole or in part, is permitted only with the explicit written authorization of the authors.

For all questions related to author rights and copyrights, please contact directly the authors.

Georgescu-Roegen versus Solow/Stiglitz : De la validité à moyen terme de la fonction Cobb-Douglas avec ressource naturelle

Marc Germain*

February 15, 2018

Résumé

La présente note évalue, dans le cadre d'un modèle de croissance optimale avec ressource non renouvelable, si une fonction de production ignorant les contraintes de la physique sur le processus de production (telle que la Cobb-Douglas) peut engendrer ou non une bonne approximation à moyen terme de la trajectoire de l'économie obtenue avec la "vraie" fonction de production, qui elle tient compte de ces contraintes. Deux fonctions qui respectent celles-ci sont considérées : la CES et une deuxième fonction élaborée spécialement pour les besoins de l'étude.

Quelle que soit la "vraie" fonction, les résultats plaident plutôt dans le sens d'une réponse négative. La Cobb-Douglas n'est acceptable que quand les contraintes de la physique agissent faiblement. L'écart à moyen terme entre les trajectoires engendrées par la Cobb-Douglas et la "vraie" fonction de production s'explique par la différence de technologie, mais aussi par le fait que la Cobb-Douglas change totalement la trajectoire à long terme de l'économie par rapport à celle induite par la "vraie" fonction de production. Le poids du futur étant beaucoup plus important avec la Cobb-Douglas, les choix du planificateur en matière de consommation et d'épargne en sont affectés et donc aussi la trajectoire de l'économie, y compris à moyen terme.

Abstract

In the framework of an optimal growth model with an exhaustible resource, this paper assesses if a production function ignoring the constraints imposed by physics (as the Cobb-Douglas) can generate or not a good approximation in the medium term of the economy's behavior obtained with the "true" production function that satisfies these constraints. Two functions that satisfies these constraints are considered : the CES and a second function specially developed for the aim of this study.

Whatever the chosen "true" function, the results rather plead for a negative answer. The Cobb-Douglas is acceptable only when the constraints of physics are weak. The medium term distance between the trajectories generated by the Cobb-Douglas and the "true" production function is explained by the difference of technologies, but also because the Cobb-Douglas changes completely the economy's long-term trajectory w.r.t. the one generated by the "true" function. The future's weight being much more important with the Cobb-Douglas, the planner's consumption and saving choices are affected and thus also the economy's trajectory, including in the medium term.

Key words: optimal growth, production function, exhaustible resource

JEL: C63, O44, Q32, Q57

*LEM-CNRS (UMR 9221), Université de Lille et IRES, Université de Louvain. L'auteur remercie Jean-François Fagnart pour ses remarques et commentaires.

1 Introduction

Il y a un peu plus de vingt ans, dans le cadre d'un numéro spécial consacré à la contribution scientifique de Nicolas Georgescu-Roegen, la revue *Ecological Economics* publiait une controverse entre H. Daly d'une part et R. Solow et J. Stiglitz d'autre part (EE, 1997).

La controverse portait sur la fonction de production supposée représenter la production de biens et services dans les modèles de croissance néo-classiques, et plus précisément sur la façon de prendre en compte les ressources naturelles. Daly soulignait que soit celles-ci sont ignorées, soit elles sont prises en compte de façon insatisfaisante. Le premier cas renvoie aux modèles de croissance ne faisant intervenir que des facteurs de production produits par l'homme (travail et capital), dans la tradition de Solow (1956). Le second cas renvoie aux modèles de croissance faisant intervenir dans une fonction de production une ressource naturelle à côté des facteurs produits par l'homme, dans la tradition de Solow (1974) et Stiglitz (1974).

Dans ce dernier cas (celui qui nous intéresse dans la présente note), la critique principale de Daly concerne l'usage de fonctions de production avec ressource naturelle (le plus souvent de type Cobb-Douglas¹) en contradiction avec les lois de conservation de la matière et de l'énergie, ainsi qu'avec le deuxième principe de la thermodynamique. Or ces lois de la physique gouvernent tous les processus de transformation de la matière et de l'énergie, en particulier ceux qui accompagnent la production de biens et services. De l'ignorance de ces lois découlent des hypothèses bien trop optimistes quant aux possibilités de production, notamment en terme de progrès technique et de substitution entre facteurs de production naturels (énergie, matières premières) et humains (capital, travail).

La critique de Daly exposée dans le paragraphe précédent est en fait une critique d'une certaine vision du monde. Même quand la ressource naturelle est prise en compte, une conséquence majeure d'une conception de la production ignorant les contraintes physiques est que l'économie peut croître indéfiniment. En effet, si certaines conditions en matière de progrès technique et/ou de substitution entre facteurs naturels et facteurs humains sont remplies, la productivité moyenne de la ressource tend vers l'infini avec le temps, ce qui permet de contrecarrer la raréfaction de la ressource (si elle est non-renouvelable) ou le fait que le stock de celle-ci demeure nécessairement borné (si elle est renouvelable). Il en découle que des sentiers de croissance équilibrée à taux positif constant sont possibles à long terme. Dans ce cadre, la conclusion fondamentale est qu'il n'y a pas de limite physique à la croissance économique (Fagnart-Germain, 2012).

Or, si on prend correctement en compte les lois de la physique mentionnées ci-dessus, la conclusion est susceptible d'être tout autre. Ainsi par exemple, la loi de conservation de la matière impose que la productivité moyenne d'une ressource (matérielle) est nécessairement bornée supérieurement (Anderson, 1987; Baumgartner, 2004). Dès lors, la critique de Daly s'avère dévastatrice dans la mesure où des sentiers de croissance équilibrée à taux positif constant de l'économie s'avèrent impossibles. Dans ce cadre, il y a bien des limites physiques à la croissance économique, au moins sur le plan quantitatif².

Dans leurs réponses, Solow (1997) et Stiglitz (1997) ne nient pas les contraintes imposées par les lois de la physique sur l'économie, mais ils en minimisent la portée pratique. En particulier, Stiglitz souligne le fait que, même si leurs modèles ont un horizon infini et autorisent en théorie que la production (voire la population) tende vers l'infini avec le temps, l'horizon utile pour l'analyse est d'une cinquantaine d'années. En conséquence, tant que les limites en terme de ressources sont suffisamment lointaines, on peut espérer qu'un modèle qui les ignorerait ou les prendrait en compte sans tenir compte des lois de la physique puisse tout de même donner une description satisfaisante

¹Mais comme l'a montré Baumgartner (2004), la critique de Daly s'étend à toute fonction de production avec ressource naturelle soumise aux conditions d'Inada.

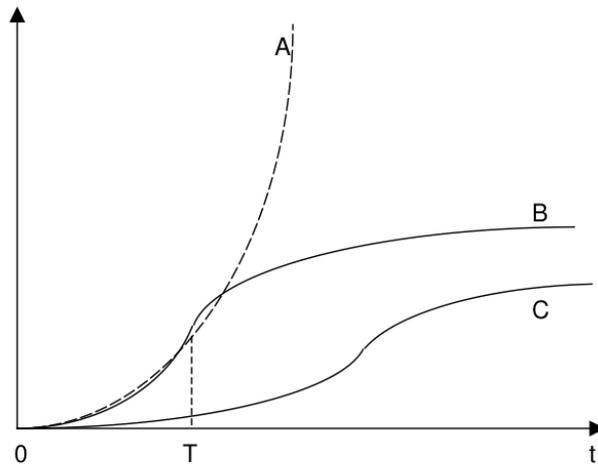
²Mais pas nécessairement sur le plan qualitatif, comme l'ont montré Fagnart et Germain (2011). Ces auteurs développent un modèle de croissance endogène dont la principale originalité est de distinguer entre qualité et quantité des biens produits, tout en respectant les postulats de l'économie écologique (en particulier le principe de conservation de la matière et le fait que la productivité de la ressource est bornée). Si la croissance est nécessairement transitoire sur le plan quantitatif, elle peut perdurer sur le plan qualitatif.

Cependant, ce dernier résultat est sujet à caution si la hausse de qualité s'accompagne d'une hausse de la complexité des biens produits. Une croissance purement qualitative n'est alors durable que si le coût énergétique de la complexité est suffisamment faible (Fagnart-Germain, 2015).

de la croissance à moyen terme.

L'argument de Stiglitz est illustré par la Figure 1, où les courbes A, B et C désignent trois trajectoires du PIB d'une économie au cours du temps. T est l'horizon mentionné par Stiglitz (une cinquantaine d'années). A est un sentier de croissance indéfinie généré par une fonction de production qui ignore les contraintes de la physique (donc impossible à long terme). B et C sont deux trajectoires possibles (et mutuellement exclusives) résultant de la prise en compte de ces mêmes contraintes. Si la "vraie" trajectoire de l'économie est B, alors l'argument de Stiglitz tient : A et B sont en effet constamment proches sur l'intervalle $[0, T]$. En revanche, il n'en va de même si C est la "vraie" trajectoire car A et C se séparent dès l'origine.

Figure 1: Interprétation de l'argument de Stiglitz



Les réponses de Solow et Stiglitz n'ont pas vraiment convaincu Daly et d'autres économistes écologiques et force est de constater que la controverse évoquée ci-dessus a tourné au dialogue de sourds. Elle reste cependant d'actualité dans la mesure où de nombreuses contributions à la théorie de la croissance publiées après le numéro de EE sont sujettes aux mêmes critiques que celles adressées par Goergescu-Roegen et Daly à Solow et Stiglitz³.

Dans l'autre sens, l'argument de Stiglitz n'a pas reçu à notre connaissance l'attention qu'il méritait. Fagnart et Germain (2011) le réfute dans le cadre de leur article, mais ils n'approfondissent pas la question (ce n'est pas leur but principal) et leur modèle présente de nombreuses différences avec ceux de Solow (1974) et de Stiglitz (1974).

Le but du présent article est d'étudier la validité de l'argument de Stiglitz dans le cadre d'un modèle similaire à celui développé par cet auteur dans son article susmentionné. Il s'agit d'un modèle de croissance optimale à la Ramsey, où la fonction de production fait intervenir (i) un facteur produit par l'homme et accumulable (le capital) et (ii) une ressource naturelle non renouvelable⁴.

Différentes trajectoires de l'économie engendrées à partir de trois fonctions de production différentes sont comparées. Ces fonctions sont (i) la Cobb-Douglas (la fonction retenue par Stiglitz et soumise à la critique de Daly), (ii) la CES avec élasticité de substitution inférieure à 1 (qui échappe à la critique de Daly) et (iii) une fonction conçue pour les besoins de cet article, appelée GEF. Celle-ci n'est pas soumise à la critique de Daly et présente la propriété d'être plus proche de la Cobb-Douglas que ne l'est la CES (dans un sens qui sera précisé ci-après). L'analyse vise à évaluer si les trajectoires générées par la Cobb-Douglas constituent une bonne approximation de

³A titre d'exemples et pour ne reprendre que des contributions récentes publiées dans des revues de référence, on peut citer Stamford da Silva (2008), Benckekroun et Withagen (2011), Bretschger et Schaefer (2017).

⁴Et qui à la façon de Stiglitz (1974) ne distingue pas les dimensions qualitative et quantitative de la croissance.

celles obtenues avec la CES ou GEF à *moyen terme*. Elle se concentre donc sur la phase transitoire et non sur la faisabilité de sentiers de croissance équilibrée à long terme.

La structure du papier est la suivante. La section 1 présente le modèle avec une fonction de production générale. Celle-ci est caractérisée par le fait que la productivité de la ressource naturelle est bornée supérieurement. La section 2 évalue si la Cobb-Douglas peut générer une trajectoire de l'économie pouvant constituer une bonne approximation à moyen terme de celle obtenue avec la CES. La section 3 fait le même exercice pour les fonctions Cobb-Douglas et GEF. La conclusion revient sur la validité de l'argument de Stiglitz à la lumière des principaux résultats obtenus.

2 Le modèle

Le modèle est celui d'une économie planifiée à la Ramsey, avec deux facteurs de production. Ces facteurs sont d'une part le capital et d'autre part une ressource naturelle (RN) non renouvelable⁵. Le capital est compris ici dans un sens très large, c-à-d comme l'ensemble des facteurs humains (main d'oeuvre, capital humain, capital physique) agissant sur la ressource pour produire des biens et services (BS)⁶.

La fonction de production macroéconomique s'écrit :

$$Y = F(AK, BX) \quad (1)$$

où Y, X, K désignent respectivement la production, la consommation de ressource et le capital. A et B sont respectivement des indices de productivité du capital et de la RN augmentant avec le progrès technique (supposé exogène). F est nulle si $K = 0$ ou $X = 0$ et est croissante et concave en chacun de ses arguments.

La fonction de production est supposée à rendements constants. En conséquence, (1) peut être réécrit sous une forme normalisée, c-à-d par unité de ressource :

$$y = \frac{Y}{X} = Bf\left(\frac{AK}{BX}\right) = Bf(k) \quad (2)$$

où (i) y désigne la production de BS par unité de ressource, (ii) k représente l'intensité en capital efficace par unité de ressource efficace. f est nulle à l'origine, croissante et concave.

Pour échapper à la critique de Daly mentionnée dans l'introduction, deux conditions doivent être remplies :

- la fonction de production définie par (2) satisfait l'inégalité suivante :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y = \bar{y} < +\infty \quad (3)$$

- le paramètre de productivité de la RN est borné supérieurement, autrement dit $B \leq \bar{B} < +\infty$. Ces deux conditions impliquent que la productivité de la RN est bornée : même avec un capital efficace infini, il est impossible de produire une quantité de BS infinie avec une quantité finie de ressource.

Comme les fonctions de production appliquées étudiées dans les sections suivantes ne se distinguent qu'au niveau de la fonction normalisée f (où les indices de productivité A et B interviennent sous la forme d'un quotient), on postulera dorénavant sans perte de généralité que $B = \bar{B} = 1$.

L'équation d'accumulation du capital s'écrit $K_{t+1} = [1 - \delta]K_t + \varphi I_t$, où t désigne le temps. δ et φ sont deux paramètres positifs qui désignent respectivement le taux de dépréciation du capital et la productivité de l'investissement. Par la suite et à la manière de Fagnart-Germain (2011),

⁵D'autres contributions retiennent cette modélisation à deux facteurs capital et RN, par exemple Fagnart et Germain (2011) et Benchekroun et Withagen (2011).

⁶Le modèle est similaire à celui de Stiglitz (1974) avec cependant quelques différences notables. La plus importante est que, contrairement à cet auteur, on ne se limite pas à la Cobb-Douglas. En revanche, Stiglitz distingue entre travail et capital (au sens strict). Il suppose aussi un taux de dépréciation du capital nul, ce qui lui permet d'engendrer des sentiers de croissance sans progrès technique. Enfin, l'approche de Stiglitz est analytique alors que celle développée ici est numérique.

on suppose que $\delta = 1$, ce qui revient à considérer des périodes de temps longues (une dizaine d'années). L'équation précédente se réduit alors à :

$$K_{t+1} = \varphi I_t \quad (4)$$

En début de trajectoire, l'économie est dotée d'un stock de RN R . Quelle que soit la trajectoire choisie par le planificateur, celle-ci doit vérifier la condition de faisabilité suivante :

$$\sum_{t=1}^T X_t \leq R \quad (5)$$

où T désigne l'horizon de temps (éventuellement infini).

A chaque période, la production est affectée soit à la consommation, soit à l'investissement. En conséquence :

$$Y_t = C_t + \frac{K_{t+1}}{\varphi} \quad (6)$$

Le planificateur résoud le problème suivant :

$$\max_{\{C_t, K_{t+1}, Y_t, X_t\}_{t \geq 1}} \sum_{t=1}^T \beta^t \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}$$

sous les contraintes

$$Y_t = F(A_t K_t, X_t) \quad (7)$$

et (4), (5) et (6), avec K_1 donné. β est le facteur d'escompte ($0 < \beta < 1$). σ est un paramètre exogène positif qui mesure l'élasticité de substitution instantanée de la consommation. Le progrès technique augmente la productivité du capital. Formellement, $A_{t+1} > A_t > 0, \forall t$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} A_t = +\infty$.

On réduit la dimension du problème en utilisant les contraintes (7) et (6) pour exprimer C_t et Y_t en fonction de K_t et X_t . Les conditions du premier ordre relatives à K_t et X_t conduisent à (cfr. Annexe) :

$$\frac{\beta^{t-1}}{C_{t-1}^\sigma} \frac{1}{\varphi} = \frac{\beta^t}{C_t^\sigma} A_t F'_V(A_t K_t, X_t), \quad t = 2, \dots, T \quad (8)$$

$$\frac{\beta^t}{C_t^\sigma} F'_X(A_t K_t, X_t) = \lambda, \quad t = 1, \dots, T \quad (9)$$

où $V = AK$ désigne le capital efficace et où λ est le multiplicateur associé à la contrainte (5). (8) est la condition familière de Ramsey décrivant le comportement de consommation et d'épargne optimal. (9) stipule que le gain d'utilité actualisé lié à la consommation d'une unité supplémentaire de RN doit être égalisé entre périodes. K_1 est donné en tant que condition initiale. La condition terminale s'écrit $K_{T+1} = 0$ ou $Y_T = C_T$, traduisant le fait qu'il n'y a aucun intérêt à investir en T .

Par la suite et quelle que soit la fonction de production choisie, la trajectoire de l'économie (c-à-d les valeurs de Y_t, K_t, X_t, C_t en fonction du temps) est obtenue en résolvant (numériquement) le système d'équations (5), (6), (7), (8) et (9).

3 CES versus Cobb-Douglas

Le but de la présente section est de comparer deux trajectoires de l'économie, la première étant obtenue avec une CES qui respecte le critère (3), la seconde étant obtenue avec une Cobb-Douglas (la fonction retenue par Stiglitz (1974)) qui viole (3). L'intention est d'évaluer si la Cobb-Douglas peut générer une trajectoire de l'économie pouvant constituer une bonne approximation à moyen terme de celle obtenue avec la CES. L'analyse se concentre sur la phase transitoire et non sur la

faisabilité de sentiers de croissance équilibrée à long terme, en conséquence de quoi l'approche est numérique.

Dans le cadre du présent modèle, la fonction de production CES s'écrit :

$$\frac{1}{Y_{ces}^\rho} = \frac{\alpha}{[AK]^\rho} + \frac{1-\alpha}{X^\rho} \quad (10)$$

ou sous forme normalisée (par unité de ressource) :

$$\frac{1}{y_{ces}^\rho} = \frac{\alpha}{k^\rho} + 1 - \alpha \quad (11)$$

α et ρ sont deux paramètres vérifiant $0 < \alpha < 1$ et $\rho \geq -1$. ρ détermine l'élasticité de substitution ν entre les deux facteurs capital et RN selon la relation $\nu = \frac{1}{1+\rho}$. α est un paramètre qui conditionne les poids respectifs des facteurs dans la production : ceteris paribus, plus α est élevé, plus le poids du capital est élevé et moins la RN est importante pour la production.

La CES généralise la fonction Cobb-Douglas : celle-ci correspond au cas particulier où $\rho = 0$ ($\Leftrightarrow \nu = 1$), auquel cas (10) et (11) conduisent respectivement à :

$$Y_{cd} = [AK]^\alpha X^{1-\alpha} \quad (12)$$

ou sous forme normalisée :

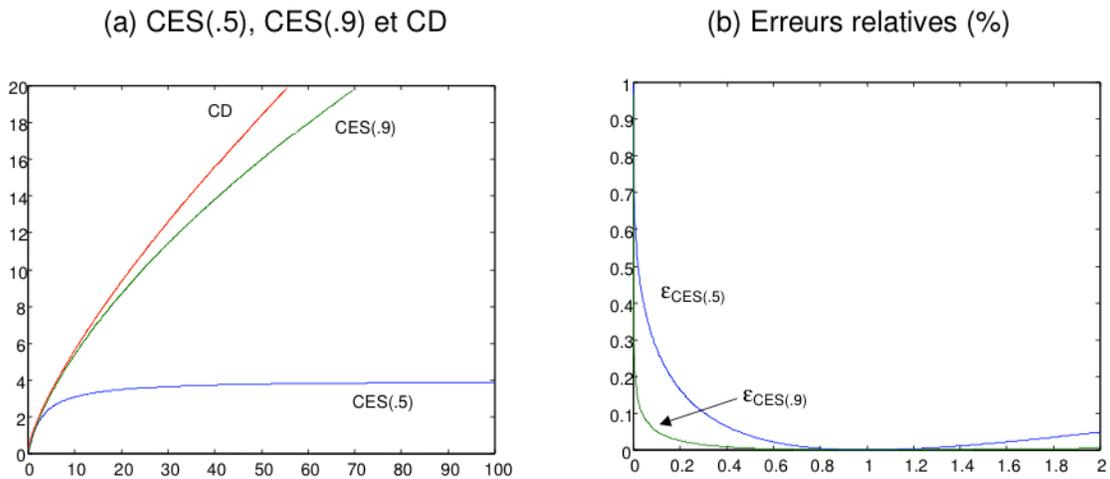
$$y_{cd} = k^\alpha \quad (13)$$

On vérifie que la CES respecte bien le critère (3) si $\rho > 0$. En effet, (11) \Rightarrow

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{ces} = \bar{y}_{ces} = \frac{1}{[1-\alpha]^{\frac{1}{\rho}}}$$

qui est bien borné puisque $0 < \alpha < 1$. La borne supérieure à la productivité de la RN \bar{y}_{ces} est d'autant plus faible (et donc d'autant plus contraignante) que (i) α est faible et (ii) ν est faible (ou que ρ est élevé). Au contraire, il est évident au vu de (13) que y_{cd} n'est pas borné et donc que la Cobb-Douglas ne satisfait pas le critère (3).

Figure 2: Les fonctions de production CD et CES (forme normalisée)



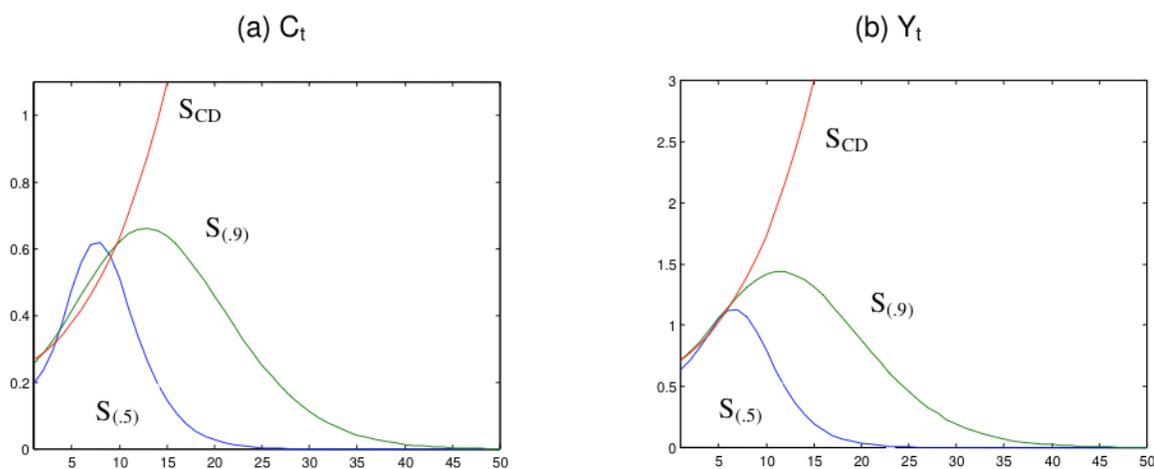
La Figure 2.a illustre sous leur forme normalisée (c-à-d en fonction de k) la CES pour deux valeurs différentes de l'élasticité de substitution et la Cobb-Douglas. Les deux valeurs de l'élasticité

de substitution sont $\nu = .5$ et $\nu = .9$ (correspondant respectivement à $\rho = 1$ et $\rho = .111$). CES(.5) décrit un contexte où facteurs humains d'une part et RN d'autre part ne sont pas facilement substituables. En revanche, CES(.9) décrit une contexte plus favorable, pas très éloigné de celui décrit par CD (la Cobb-Douglas est caractérisée par une élasticité unitaire). La figure suggère que CD est une bonne approximation de CES(.5) jusque $k = 2.5$ et de CES(.9) jusque $k = 10$ (environ). La Figure 2.b nuance cette observation en montrant l'erreur relative entre les deux fonctions pour $k \in [0, 2]$ ⁷. CD n'est en fait proche de CES(.5) qu'autour de $k = 1$ (où les fonctions coïncident) et n'est proche de CES(.9) que pour $k > .4$. Pour les deux CES, l'erreur relative approche les 100% quand $k \rightarrow 0$.

3.1 Analyse de la simulation de référence (SR)

Les Figures 3.a-b montrent les trajectoires de l'économie $S_{(.5)}$, $S_{(.9)}$ et S_{CD} en fonction du temps t , engendrées respectivement par le modèle avec les fonctions CES(.5), CES(.9) et CD⁸.

Figure 3: Trajectoires générées par CES(.5), CES(.9) et CD (long terme)



La première observation concerne un résultat connu : seule la Cobb-Douglas permet une croissance indéfinie de l'économie et ce, grâce au progrès technique et bien que la consommation de RN décroisse vers zéro. Dès lors que l'élasticité de substitution est inférieure à 1, seule une croissance transitoire est possible et tôt ou tard, l'économie rentre en décroissance. Les Figures 3.a-b montrent que le point de retournement de la croissance est d'autant plus lointain que l'élasticité est grande.

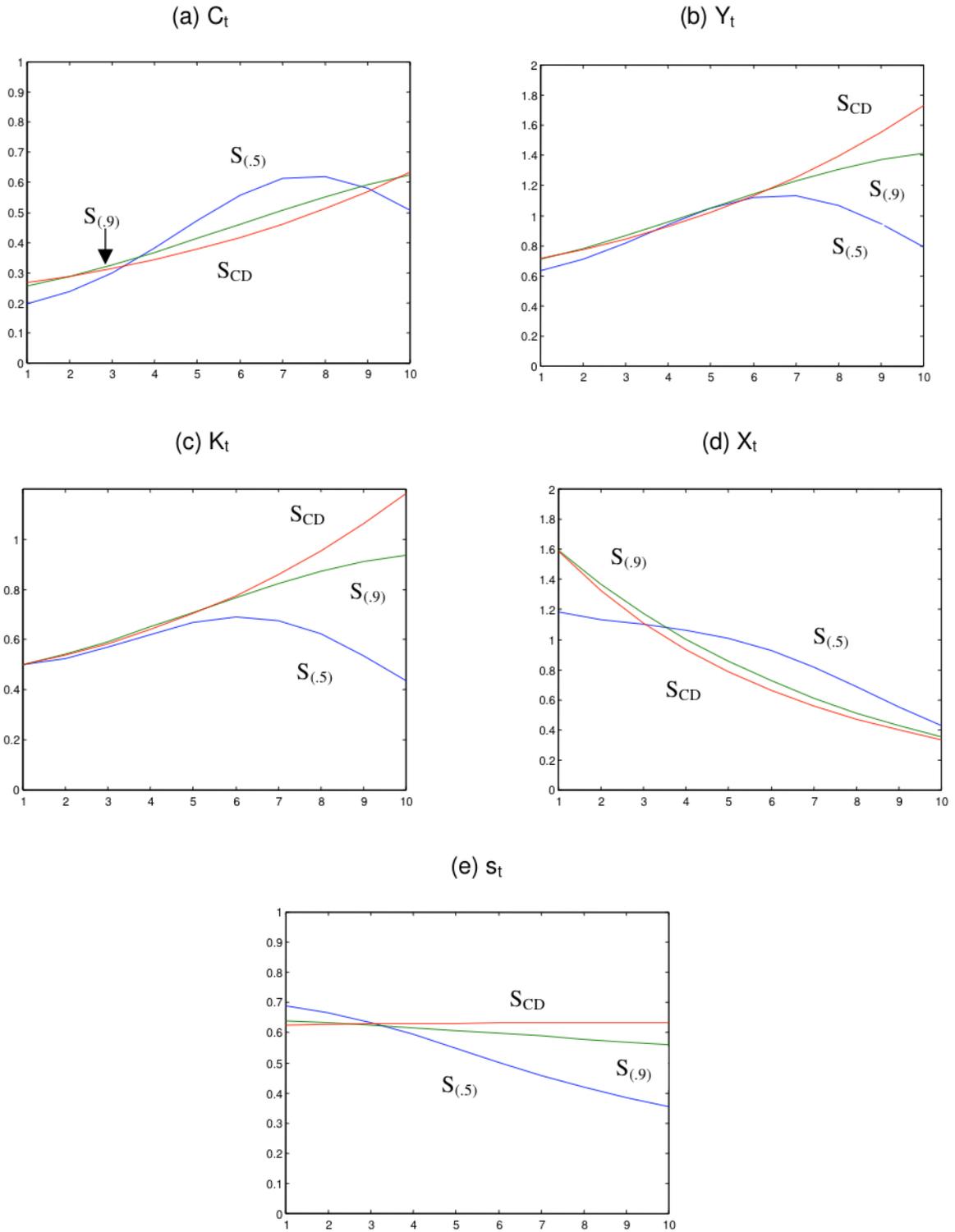
Avec la Cobb-Douglas, vu que $Y_t \rightarrow +\infty$ et $X_t \rightarrow 0$, la productivité de la RN $y_t \rightarrow +\infty$. Le critère (3) est donc tôt ou tard violé. La Cobb-Douglas ne peut donc être retenue comme une description satisfaisante de la technologie à long terme.

Mais qu'en est-il à moyen terme, c-à-d pour les premières périodes de la trajectoire ? Si la trajectoire de l'économie diffère totalement à long terme selon que la fonction de production est une Cobb-Douglas ou une CES, les Figures 3.a-b montrent qu'il n'en va pas de même à moyen terme. Les courbes évoluent dans le même sens, et la Figure 3.b suggère même que la Cobb-Douglas génère une bonne approximation des trajectoires obtenues avec CES(.5) et CES(.9) au niveau de la production Y_t .

⁷L'erreur relative est calculée comme suit : $\varepsilon_{CES(\nu)}(k) = 100 \left[1 - \frac{y_{ces}(k)}{y_{cd}(k)} \right]$.

⁸La paramétrisation du modèle pour la simulation de référence est la suivante : $\alpha = .75, \beta = .8, \varphi = 1.2, \nu = .5$ ou $.9, \sigma = .5, R = 10, K_1 = .5$ Le progrès technique décrit par la fonction A_t est calibré de façon à engendrer une croissance de l'économie à un taux "raisonnable" pendant les premières périodes.

Figure 4: Trajectoires générées par CES(.5), CES(.9) et CD (moyen terme)



Les Figures 4.a-e décrivent les trajectoires engendrées par CES(.5), CES(.9) et CD pour $t \leq 10$. Par la suite, on appellera "horizon de moyen terme" (HMT) l'intervalle de temps correspondant aux 5,6 premières périodes. Si l'on retient l'argument de Stiglitz selon lequel l'horizon utile des modèles de croissance est d'une cinquantaine d'année (cfr. Introduction), c'est au niveau de HMT que la validité de la Cobb-Douglas doit être testée. Les considérations qui suivent concernent donc HMT.

1. Sans surprise, l'écart moyen entre les courbes générées par CES et CD est d'autant plus faible que l'élasticité de substitution entre facteurs de production (ν) est grande. L'examen visuel des figures montre que S_{CD} (courbes rouges) est en moyenne plus proche de $S_{(.9)}$ (courbes vertes) que de $S_{(.5)}$ (courbes bleues).
2. A ν donné, la qualité de l'approximation sur HMT varie d'une variable à l'autre. Elle est la meilleure pour le capital K_t , ce qui peut s'expliquer (au moins en partie) par le fait que K_1 est donné et donc commun au trois trajectoires (Figure 4.c). Elle est en revanche moins bonne pour la consommation C_t , le taux d'épargne s_t et la consommation de RN X_t ⁹.
3. L'approximation de $S_{(.9)}$ par S_{CD} apparaît satisfaisante. L'erreur relative¹⁰ est inférieure à 10 % pour Y_t et C_t . Elle est encore meilleure pour K_t . Même quand les courbes $S_{(.9)}$ et S_{CD} se distinguent, elles ont la même allure. En revanche, l'approximation de $S_{(.5)}$ par S_{CD} est clairement mauvaise pour C_t, s_t et X_t et ce, dès le début de la trajectoire¹¹.
4. Le comportement du flux de RN X_t dépend fortement de ν (Figure 4.d). Par rapport à S_{CD} , l'exploitation de la RN est systématiquement plus intensive pour $S_{(.9)}$. En revanche, elle est d'abord plus faible puis plus élevée avec $S_{(.5)}$.
5. Le taux d'épargne s_t tend vers une constante dans le cas de la trajectoire générée par CD (ce qui est logique puisqu'elle tend vers un sentier de croissance équilibrée à taux constant) et décroît pour celles obtenues avec les CES (Figure 1.e). La décroissance de s_t est d'autant plus forte que ν est faible. En revanche, s_t est d'autant plus élevé en début de trajectoire que ν est faible.

Sur le plan économique, deux effets peuvent éclairer les observations précédentes, en particulier la dernière :

- un effet lié au "poids du moyen terme" : dans le cas de la CES, C_t tend nécessairement vers zéro dans le long terme. Au contraire, dans le cas de la Cobb-Douglas, C_t tend vers l'infini dans le long terme. Il en découle que le moyen terme a un poids dans l'objectif du planificateur plus important avec une CES qu'avec la Cobb-Douglas.
- un effet lié aux "conditions de production" : plus ν est élevé, plus la production est élevée pour les mêmes quantités des facteurs de production, autrement dit plus les conditions de production sont favorables.

CES(.9) et CD étant proches au niveau des conditions de production, c'est surtout l'effet "poids du moyen terme" qui explique la différence des trajectoires. Ce poids étant plus fort pour la CES, le planificateur tend à exploiter plus intensément la RN pendant les premières périodes (Figure 1.d), ce qui lui permet de consommer plus (par rapport à S_{CD}) (Figure 4.a).

Pour CES(.5), l'effet "conditions de production" joue forcément un rôle plus important. Bien que ces conditions soient plus défavorables, le planificateur décide durant HMT de niveaux de production, de capital et de consommation proches, voire supérieurs, à ceux obtenus avec la CD (cfr. Figures 4.a-c). Dans un premier temps ($t = 1, 2$), cela se fait par une épargne plus élevée (comparée à S_{CD}), ce qui permet de soutenir le capital et la production. Dans un deuxième temps ($t \geq 3$), le planificateur maintient de hauts niveaux de consommation via (i) la baisse de l'épargne (Figure 1.e) et (ii) l'intensification de l'exploitation de la RN, celle-ci permettant de maintenir la croissance de la production malgré l'impact négatif de la baisse de l'épargne sur le capital. Il en découle une consommation plus élevée de la RN comparée à S_{CD} , comme l'illustre la Figure 4.d où $S_{(.5)}$ passe au-dessus de S_{CD} à partir de $t = 4$.

⁹Le niveau anormalement élevé du taux d'épargne (par rapport aux valeurs observées empiriquement) est lié à l'interprétation très large du capital faite ici. Rappelons qu'il comprend l'ensemble des facteurs agissant sur la RN, c-à-d le capital physique, le capital humain et le travail.

¹⁰L'erreur relative pour la variable x_t est mesurée par le rapport $100(1 - x_t^{C(\nu)}/x_t^{CD})$ (en %), où $x_t^{C(\nu)}$ et x_t^{CD} sont respectivement obtenues avec les fonctions CES(ν) et CD.

¹¹L'erreur relative pour C_t évolue de -30% à +30% sur HMT.

En conclusion, il apparaît que la technologie représentée par la fonction de production a une influence à court et à moyen terme, et pas seulement à long terme, sur les choix intertemporels en termes de consommation et d'épargne d'une part, et d'exploitation de la RN d'autre part. Cette influence est d'autant plus forte que l'élasticité de substitution ν est faible. Elle explique le fait que la Cobb-Douglas génère une approximation grossière de la trajectoire de l'économie obtenue avec la CES quand la substitution entre facteurs de production est plus difficile.

3.2 Autres paramétrisations

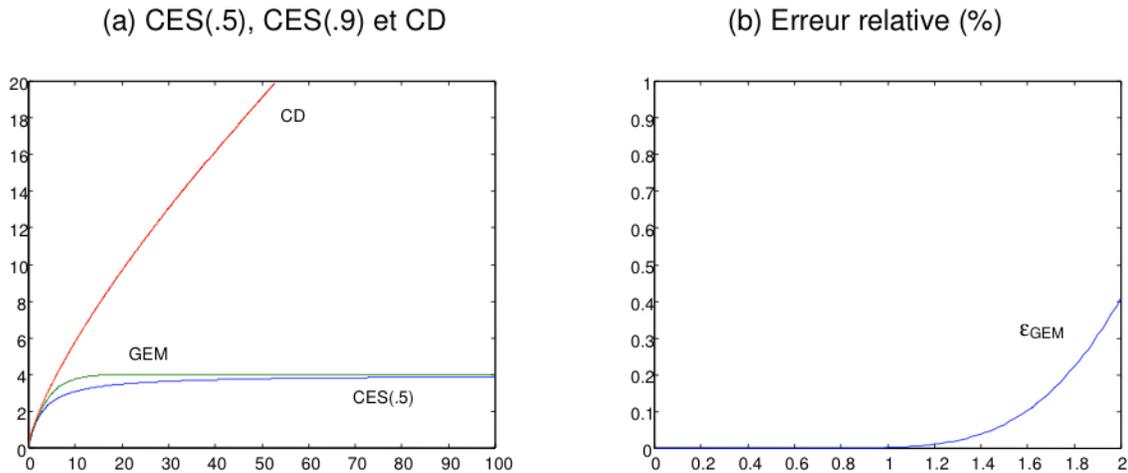
Afin de tester la robustesse des conclusions de la sous-section précédente, on a étudié les trajectoires obtenues avec la CES et la Cobb-Douglas pour d'autres paramétrisations du modèle. Concrètement, on a fait varier successivement les principaux paramètres du modèle β, σ, α et R . L'analyse s'est concentrée sur les fonctions CES(.5) et CD.

Des simulations obtenues, il apparaît que si l'élasticité de substitution entre capital et ressource est sensiblement inférieure à 1, le constat fait dans le cadre de la SR s'étend pour d'autres jeux de paramètres : l'approximation générée par la Cobb-Douglas de la trajectoire obtenue avec la CES est le plus souvent grossière et ce, même pour les premières périodes.

4 GEF versus Cobb-Douglas

Les valeurs de k_t obtenues avec CES(.5) dans le cadre de la SR sur HMT sont comprises dans l'intervalle $[.4, 1.4]$. Or la Figure 2.b montre que CES(.5) et CD ne sont proches qu'autour de 1. Il n'est dès lors pas étonnant que la trajectoire engendrée par CD ne soit qu'une piètre approximation de celle obtenue avec CES(.5)¹². Les fonctions CES(.5) et CD sont mathématiquement trop différentes pour qu'il en aille autrement.

Figure 5: Les fonctions de production CES(.5), GEF et CD (forme normalisée)



Mais la CD ne pourrait-elle pas être acceptable dans le cas d'une autre "vraie" fonction de production, dont elle serait mathématiquement plus proche ? Le but de la présente section est double. D'abord de proposer une nouvelle fonction de production (i) satisfaisant le critère (3), (ii)

¹²Au contraire, les valeurs de k_t obtenues avec CES(.9) dans le cadre de la SR sur HMT sont comprises dans l'intervalle $[.35, 1.5]$, sur lequel CES(.9) et CD sont proches (cfr. Figure 2.b). D'où la bonne approximation de la trajectoire liée à CES(.9) par celle engendrée par CD.

ayant la Cobb-Douglas comme cas particulier et (iii) proche de la Cobb-Douglas sur une intervalle de valeurs de k suffisamment large pour éviter le problème rencontré avec CES(.5). Ensuite de comparer les trajectoires de l'économie obtenues avec cette fonction d'une part, et la Cobb-Douglas d'autre part.

La fonction (appelée ci-après GEF) qu'on se propose d'étudier est la suivante¹³ :

$$Y = X f_{gef}(k) \quad (14)$$

où :

$$y = f_{gef}(k) = \begin{cases} k^\alpha [1 - \exp(-\frac{b}{k})], & 0 \leq k \leq \bar{k} \\ \bar{y}, & k > \bar{k} \end{cases} \quad (15)$$

où \bar{k} est défini implicitement par la condition $f'_{gef}(\bar{k}) = 0$ et $\bar{y} = \bar{k}^\alpha [1 - \exp(-\frac{b}{\bar{k}})]$. La fonction $f_{gef}(k)$ (c-à-d GEF sous forme normalisée) est illustrée par la Figure 5.a. Elle est nulle à l'origine, partout continue et dérivable et concave. Dans la Figure 5.a, le paramètre b est ajusté de façon que GEF aie la même valeur maximale que CES(.5).

GEF possède bien les propriétés désirées mentionnées au paragraphe précédent :

- (i) Elle satisfait (3)¹⁴. A la différence de la CES, GEF atteint sa valeur maximale pour une valeur finie de k .
- (ii) CD est un cas particulier de GEF obtenu quand $b \rightarrow +\infty$.
- (iii) Enfin, la Figure 1.b montre que GEF se confond pratiquement avec CD sur l'intervalle $[0, 1]$. L'erreur relative augmente avec k , mais elle demeure limitée à .4% pour $k = 2$.

GEF conduit l'économie vers un état stationnaire nul, comme le fait la CES et contrairement à la Cobb-Douglas qui engendre un sentier de croissance équilibrée. A long terme, CD et GEF divergent donc totalement. Cela empêche-t-il CD d'engendrer une bonne approximation de la trajectoire obtenue avec GEF à moyen terme ? Les Figures 6.a-f décrivent pour $1 \leq t \leq 10$ les trajectoires de l'économie S_{CES} , S_{GEF} et S_{CD} obtenues respectivement avec CES(.5), GEF et CD. Elles conduisent aux observations suivantes.

1. Sur HMT, l'écart entre les trajectoires S_{GEF} par S_{CD} est très faible pour la productivité de la RN y_t (Figures 6.f). Il en va de même pour l'intensité en capital efficace par unité de RN k_t . L'explication est liée au fait que les valeurs prises par k_t sur HMT appartiennent à l'intervalle $[0, 2]$, sur lequel CD et GEF sont très proches.
2. Malheureusement, il n'en va pas de même pour les variables Y_t , C_t , K_t et X_t , comme le montrent les Figures 6.a-d. Sur HMT, l'erreur relative (mesurée par l'écart entre S_{GEF} et S_{CD}) est comprise entre 0 et 15% pour la production, ce qui n'est pas négligeable. Elle est cependant plus acceptable pour la consommation de BS (entre 0 et 8%).
3. Globalement, l'approximation de S_{GEF} par S_{CD} est meilleure que celle de S_{CES} par S_{CD} . C'est nettement le cas pour les variables normalisées y_t et k_t . C'est aussi le cas, quoique dans une moindre mesure, pour la consommation de BS C_t , pour la consommation de RN X_t ainsi que pour l'épargne. En revanche, on observe le résultat plutôt inattendu que S_{CD} n'approche pas vraiment mieux S_{GEF} que S_{CES} au niveau de la production Y_t et du capital K_t .

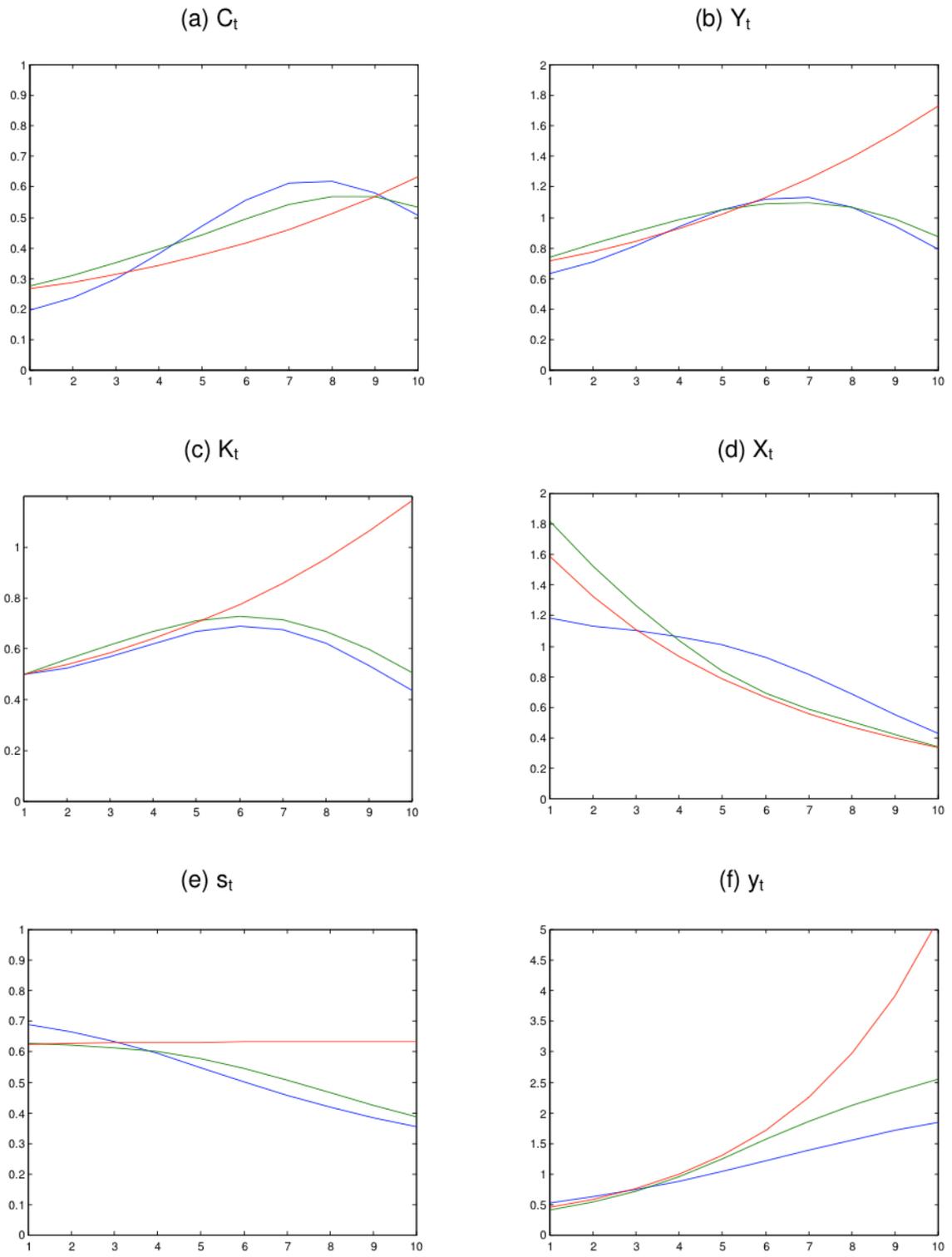
En conclusion, il apparaît que des deux effets mentionnés à la section 3.1, seul l'effet "conditions de production" est neutralisé par la fonction GEF. L'effet "poids du futur" demeure quant à lui bien présent. Ce deuxième effet suffit à empêcher que les trajectoires générées par CD et GEF soient proches. Tout comme ce qui se passait avec la CES, le poids du futur beaucoup plus important avec la Cobb-Douglas modifie les choix du planificateur en matière de consommation et d'épargne et donc aussi la trajectoire de l'économie, y compris à moyen terme.

¹³La fonction GEF appartient à la même catégorie de fonctions de production que celles développées par Lindenberg et Kümmel (2011) ou Maes et Van Passel (2013). Ces fonctions sont explicitement conçues pour respecter des limites imposées par la physique, sur le plan énergétique ou sur le plan de la matière.

La fonction LINEX élaborée par Kümmel a été utilisée dans le cadre de plusieurs études destinées à révaluer la part de l'énergie dans le PIB, notamment par rapport à des estimations très faibles reposant sur la Cobb-Douglas. Cfr. Ayres et al. (2013) et Kümmel et al. (2015) ainsi que les contributions qui y sont citées.

¹⁴En effet, la fonction $k^\alpha [1 - \exp(-\frac{b}{k})]$ croît à partir de l'origine de façon monotone, atteint son maximum en $k = \bar{k} < +\infty$ puis décroît de façon monotone pour $k > \bar{k}$. Comme le montre (15), $f_{gef}(k)$ coïncide avec $k^\alpha [1 - \exp(-\frac{b}{k})]$ sur $[0, \bar{k}]$, puis reste fixée à sa valeur maximale \bar{y} pour $k > \bar{k}$.

Figure 6: Trajectoires générées par CES(.5), GEF et CD (moyen terme)



5 Conclusion

Le but de la présente note est d'évaluer, dans le cadre d'un modèle de croissance optimale avec ressource non renouvelable, dans quelle mesure une fonction de production ignorant les contraintes de la physique sur le processus de production peut engendrer une bonne approximation à moyen terme de la trajectoire obtenue avec la "vraie" fonction de production, qui elle tient compte de ces contraintes. Dans le modèle, celles-ci se traduisent par une borne supérieure à la productivité de la ressource. Trois fonctions sont étudiées : les fonctions CES et GEF qui respectent cette borne et la Cobb-Douglas qui ne la respecte pas. Exprimée par unité de ressource, GEF présente l'intérêt d'être très proche de la Cobb-Douglas pour un intervalle de valeurs de la variable indépendante beaucoup plus large que dans le cas de la CES.

De l'analyse des simulations, il ressort que l'écart entre les trajectoires de l'économie générées avec la Cobb-Douglas et la "vraie" fonction de production dépend de celle-ci. Cet écart varie aussi en fonction de la variable considérée. Pour la majorité des variables (mais pas pour toutes), la trajectoire générée par la Cobb-Douglas est plus proche de celle de GEF que de celle de CES. L'écart entre les trajectoires générées par la Cobb-Douglas et la CES (ou GEF) est aussi d'autant plus élevé que la borne supérieure à la productivité de la ressource est faible.

L'écart entre trajectoires s'explique évidemment en premier lieu par la différence de fonction de la production. Mais même quand on réduit sensiblement cette différence (ce que GEF permet de faire), les simulations montrent que l'écart entre trajectoires demeure non négligeable pour certaines variables, à l'exemple de la production. Cet écart demeure parce que la Cobb-Douglas change totalement la trajectoire à long terme de l'économie par rapport à celle induite par la "vraie" fonction de production. Alors que la Cobb-Douglas permet une croissance indéfinie, la CES ou GEF force tôt ou tard l'activité à tendre vers zéro. Le poids du futur est donc beaucoup plus important avec la Cobb-Douglas, ce qui affecte le planificateur dans ses choix intertemporels en matière de consommation et d'épargne, et donc aussi la trajectoire de l'économie à moyen terme.

Les résultats obtenus dans cette note ne plaident donc pas en faveur de l'idée que la fonction Cobb-Douglas puisse générer, dans le cadre d'un modèle de croissance optimale, une bonne approximation à moyen terme de la trajectoire obtenue avec une fonction de production tenant compte des contraintes de la physique sur le processus de production. Il n'y a que quand ces contraintes agissent faiblement que la Cobb-Douglas est acceptable. Malheureusement, différents travaux empiriques ne confirment pas qu'il en va toujours ainsi, en particulier pour l'énergie¹⁵.

La présente note ne prétend cependant pas clôturer le débat. L'idée mentionnée au paragraphe précédent pourrait ainsi être testée dans le cadre d'autres modèles, notamment avec croissance endogène et/ou générations imbriquées. Une approche mathématique plus générale (c-à-d sans recourir à des fonctions de production particulières) serait sans nul doute une autre extension intéressante.

6 Bibliographie

Anderson (1987). "The production process : inputs and wastes", *Journal of Environmental Economics and Management*, 14, 1-12.

Ayres R., J. van den Bergh, D. Lindenberger et B. Warr (2013). "The underestimated contribution of energy to economic growth", *Structural Change and Economic Dynamics*, 27, 79-88.

Baumgartner S. (2004), "The Inada conditions for material resource inputs reconsidered", *Environmental and Resource Economics*, 29, 307-322.

¹⁵A partir de données industrielles pour 12 pays de l'OCDE, van der Werf (2008) obtient sur base de la CES des estimations de l'élasticité de substitution entre l'énergie et le couple capital-travail entre .17 et .65 au niveau des industries et entre .17 et .65 au niveau des pays. Il teste l'hypothèse d'une élasticité unitaire (le cas Cobb-Douglas) et la rejette pour toutes les industries et tous les pays considérés. Par ailleurs, Lindenberger et Kümmel (2011) montrent au moyen de la fonction LINEX que le poids de l'énergie dans la croissance de différents pays industrialisés est bien supérieur à celui estimé à partir de la part de ce facteur dans le PIB.

- Benchekroun H. et C. Withagen (2011). "The optimal depletion of exhaustible resources: A complete characterization", *Resource and Energy Economics*, 33, 612-636.
- Bretschger L. et A. Schaefer (2017). "Dirty history versus clean expectations: Can energy policies provide momentum for growth ?", *European Economic Review*, 99, 170-190.
- Daly H. (1997). "Georgescu-Roegen versus Solow/Stiglitz", *Ecological Economics*, 22, 261-266.
- EE (1997). *Ecological Economics*, 22(3), 171-312.
- Fagnart J.-F. et M. Germain (2011). "Quantitative versus qualitative growth with recyclable resource", *Ecological Economics*, 70(5), 929-941
- Fagnart J.-F. et M. Germain (2012). "Les limites environnementales à la croissance en macroéconomie", *Reflets et Perspectives*, Vol. LI, 2012/4, 25-44.
- Fagnart J.-F. et M. Germain (2015). "Energy, complexity and sustainable long-term growth", *Mathematical Social Sciences*, 75, 8793.
- Kümmel R., D. Lindenberger et F. Weiser (2015). "The economic power of energy and the need to integrate it with energy policy", *Energy Policy*, 86, 833-843.
- Lindenberger D. et R. Kümmel (2011), "Energy and the state of nations", *Energy*, 36, 6010-6018.
- Maes D. et S. Van Passel (2013). "Matter-dependent production functions for economic modelling of firms", *Ecological Economics and Institutional Dynamics : 10th biennial conference of the European Society for Ecological Economics*, Lille.
- Solow R. (1974). "Intergenerational equity and exhaustible resources", *Review of Economic Studies*, 41, 29-45.
- Solow R. (1956). "A contribution to the theory of economic growth", *Quarterly Journal of Economics*, 70(1), 65-94.
- Solow R. (1997). "Reply : Georgescu-Roegen versus Solow/Stiglitz", *Ecological Economics*, 22, 267-268.
- Stamford da Silva A. (2008). "Growth with exhaustible resource and endogenous extraction rate", *Economic Modelling*, 25, 1165-1174.
- Stiglitz J. (1974). "Growth with exhaustible natural resources : efficient and optimal growth path", *Review of Economic Studies*, 41, 123-137.
- Stiglitz J. (1997). "Reply : Georgescu-Roegen versus Solow/Stiglitz", *Ecological Economics*, 22, 269-270.
- van der Werf E. (2008). "Production functions for climate policy modeling: An empirical analysis", *Energy Economics*, 30, 2964-2979.

7 Annexe

7.1 Dérivation des conditions du premier ordre

Le lagrangien s'écrit :

$$L = \sum_{t=1}^T \beta^t \frac{C_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + \lambda \left[R - \sum_{t=1}^T X_t \right]$$

où λ est le multiplicateur associé à la contrainte (5). Celle-ci est nécessairement liante en T car le planificateur peut toujours augmenter la production et la consommation avec la RN restée inexploitée. On réduit la dimension du problème en utilisant les contraintes (7) et (6) pour exprimer C_t et Y_t en fonction de K_t et X_t .

Les CPO relatives à K_t et X_t s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial k_t} &= \frac{\beta^{t-1}}{C_{t-1}^\sigma} \frac{\partial C_{t-1}}{\partial K_t} + \frac{\beta^t}{C_t^\sigma} \frac{\partial C_t}{\partial Y_t} \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = 0, \quad t = 2, \dots, T \\ \frac{\partial L}{\partial X_t} &= \frac{\beta^t}{C_t^\sigma} \frac{\partial C_t}{\partial Y_t} \frac{\partial Y_t}{\partial X_t} - \lambda = 0, \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} -\frac{\beta^{t-1}}{C_{t-1}^\sigma} \frac{1}{\varphi} + \frac{\beta^t}{C_t^\sigma} F'_V(A_t K_t, X_t) \frac{\partial V_t}{\partial K_t}, \quad t &= 2, \dots, T \\ \frac{\beta^t}{C_t^\sigma} F'_X(A_t K_t, X_t) - \lambda, \quad t &= 1, \dots, T \end{aligned}$$

où $V_t =_{def} A_t K_t$. Ces conditions conduisent bien (8) et (9).